

TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ ĐỊA CHẤT
BỘ MÔN TOÁN – KHOA KHCB

BÁO CÁO HỌC THUẬT

HÀM MỘT BIẾN PHỨC VÀ LÝ THUYẾT THẶNG DƯ

Nguyễn Thị Lan Hương

Hà Nội, 12/2024

MỤC LỤC

1	HÀM MỘT BIẾN PHỨC	3
2	LÝ THUYẾT THẶNG DƯ	19
3	KẾT LUẬN	23
4	TÀI LIỆU THAM KHẢO	23

A.-HÀM MỘT BIẾN PHỨC

1.1 MIỀN VÀ BIÊN

- Ta gọi *miền* trong mặt phẳng phức là một tập hợp D các điểm có hai tính chất sau

i) Mọi điểm z của D đều có một hình tròn tâm z nằm trọn trong D , tức D là tập mở.

ii) Mọi cặp điểm z_1, z_2 của D có thể nối bằng một đường gấp khúc nằm hoàn toàn trong D , tức D liên thông.

- *Biên của miền* là tập C các điểm của mặt phẳng phức thỏa mãn

a) $C \cap D = \emptyset$

b) Một hình tròn bất kỳ nếu đã chứa bên trong nó một điểm nào đó của C thì phải chứa ít ra một điểm nào đó của D .

$D \cup C$ được gọi là *miền kín* hay *miền đóng* và ký hiệu là \bar{D} . Biên C của D có thể gồm nhiều thành phần tách rời nhau. Mỗi thành phần là một đường cong hoặc một *nhát cắt* hoặc một điểm. Người ta nói D là *miền n – liên* nếu biên của nó gồm n thành phần. Nếu $n = 0, 1$ thì ta gọi D là *miền đơn liên*, nếu $n \geq 2$ thì ta gọi D là *miền đa liên*.

Lân cận ε (> 0) của điểm z_0 ($\neq \infty$) là hình tròn $|z - z_0| < \varepsilon$, trong khi lân cận ε của điểm $z = \infty$ lại là $|z| > \varepsilon$.

1.2 ĐỊNH NGHĨA HÀM MỘT BIẾN PHỨC

-Định nghĩa 1.2.1 Nếu với mỗi giá trị z của tập điểm A trong mặt phẳng kín ta có tương ứng một hay nhiều giá trị W thì ta nói trên tập A đã cho một hàm biến phức: $W = f(z)$.

Khi đó, ta nói tương ứng f là hàm đơn trị hay đa trị; z là biến độc lập hay đối số, W là biến phụ thuộc hay hàm số.

Gọi B là tập hợp các điểm W tương ứng với tất cả các điểm z của A , ta còn nói $W = f(z)$ thực hiện một phép biến hình (ánh xạ); W được gọi là ảnh của z và z là nghịch ảnh của W qua phép biến hình $W = f(z)$.

B là ảnh của tập A qua phép biến hình $W = f(z)$ và ký hiệu $B = f(A)$. Nhờ tương ứng $W = f(z)$, mỗi điểm W của B ứng với một hay nhiều điểm z của A. Vậy trên B đã xác định một hàm biến tập B lên tập A: $z = g(W)$.

Hàm $z = g(W)$ được gọi là hàm ngược của hàm $W = f(z)$.

Đặc biệt, khi hàm $W = f(z)$ đơn trị trong A và hàm ngược của nó $z = g(W)$ đơn trị trong B thì ta nói phép biến hình $W = f(z)$ đơn trị hai chiều hay *đơn diệp* trong A. (trong trường hợp này thì ta luôn có: $f(z_1) \neq f(z_2)$ nếu $z_1 \neq z_2$)

Nếu $t = f_1(z)$ biến tập A lên tập B_1 và $W = f_2(t)$ biến B_1 lên B thì phép biến hình A lên B thực hiện bởi hàm hợp: $W = f(z) = f_2[f_1(z)]$, được gọi là hợp hoặc tích của các phép biến hình f_1 và f_2 , ký hiệu là: $f = f_2.f_1$.

Vì $z = x + iy$ và $W = u + iv$, việc cho một hàm biến phức $W = f(z)$ trên tập A tương đương với việc cho trên A hai hàm thực của hai biến thực x, y: $u = u(x, y)$ và $v = v(x, y)$.

Các ví dụ: phép co giãn (phép đồng dạng với hệ số k); phép quay mặt phẳng z góc α ; phép tịnh tiến; phép biến hình tuyến tính nguyên.

1.3 GIỚI HẠN CỦA HÀM

Cho $f(z)$ xác định đơn trị trong một lân cận của điểm z_0 (trừ z_0).

- Định nghĩa 1.3.1 Nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho ảnh lân cận δ của z_0 (trừ z_0) qua phép biến hình $W = f(z)$ nằm trong lân cận ε của W_0 thì ta nói W_0 là giới hạn của $f(z)$ khi z dần đến z_0 và ký hiệu là: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = W_0$.

Các điểm z_0 và W_0 nói trong định nghĩa có thể là ∞ . Vậy có 4 trường hợp sau

- 1) $z_0, W_0 \neq \infty$
- 2) $z_0 \neq \infty, W_0 = \infty$
- 3) $z_0 = \infty, W_0 \neq \infty$
- 4) $z_0, W_0 = \infty$

Mỗi hàm $f(z)$ có giới hạn hữu hạn khi $z \rightarrow z_0$ đều giới nội (bị chặn) về modun trong một lân cận nào đó của z_0 .

- Định lý 1.3.2 Nếu $z_0 = x_0 + iy_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$; $W_0 = u_0 + iv_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$ thì từ sự hội tụ của hàm $W = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \rho(r, \varphi) e^{i\theta(r, \varphi)}$ đến giới hạn W_0 khi $z \rightarrow z_0$, ta suy ra với $W_0 \neq \infty$:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(x, y) = u_0$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} v(x, y) = v_0$$

Và với $W_0 \neq 0, \infty$ cùng với việc chọn argument thích hợp:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \rho(r, \varphi) = \rho_0$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \theta(r, \varphi) = \theta_0$$

Điều ngược lại cũng đúng, không trừ một ngoại lệ nào.

Các định lý cơ bản về giới hạn của hàm thực vẫn còn đúng đối với hàm phức.

1.4 TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM

Giả sử hàm $f(z)$ xác định đơn trị tại điểm z_0 và lân cận điểm đó.

- Định nghĩa 1.4.1 Ta nói hàm $W = f(z)$ liên tục tại điểm z_0 nếu tồn tại

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \quad (\neq \infty) \quad (*)$$

Hay nếu đặt $z - z_0 = \Delta z$; $f(z) - f(z_0) = \Delta W$ thì $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta W = 0$.

Trong định nghĩa trên, z_0 và $f(z_0)$ phải hữu hạn. Nếu một trong hai yêu cầu này không thỏa mãn nhưng ta vẫn có (*) thì ta nói $f(z)$ liên tục tại z_0 theo nghĩa rộng.

Điểm mà tại đó hàm $f(z)$ không liên tục gọi là điểm gián đoạn.

Hàm $f(z)$ liên tục trong miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm của miền D .

-Định lý 1.4.2 Nếu hàm $W = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ liên tục tại $z_0 = x_0 + iy_0$ thì các hàm $u = u(x, y)$ và $v = v(x, y)$ liên tục tại (x_0, y_0) và ngược lại.

-Định lý 1.4.3 Nếu hàm $f(z)$ liên tục trong miền kín giới nội \bar{D} thì bị chặn (giới nội) trong miền kín đó, tức là có $M > 0$ sao cho với mọi z thuộc \bar{D} ta có $|f(z)| \leq M$.

-Định lý 1.4.4 Nếu hàm $f(z)$ liên tục trong miền kín giới nội \bar{D} thì nó đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (về mô đun) trong \bar{D} .

1.5 ĐIỀU KIỆN KHẢ VI

Giả sử $W = f(z)$ xác định đơn trị trong một lân cận nào đó của điểm $z (\neq \infty)$. Ta thấy trong lân cận đó một điểm $z + \Delta z$ và ký hiệu số gia tương ứng của hàm là: $\Delta W = f(z + \Delta z) - f(z)$.

-Định nghĩa 1.5.1 Nếu khi $\Delta z \rightarrow 0$ mà tỉ số $\Delta W/\Delta z$ dần đến một giới hạn thì ta nói rằng hàm $f(z)$ khả vi tại điểm z và gọi giới hạn đó là đạo hàm của $f(z)$ tại z , ký hiệu $f'(z)$.

$$\text{Vậy: } f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta z}.$$

Lưu ý: hàm $f(z)$ khả vi tại z thì liên tục tại z nhưng điều ngược lại không đúng.

-Định lý 1.5.2 (Cauchy-Riemann)

a) Điều kiện cần: Nếu $W = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ khả vi tại điểm $z = x + iy$ thì các hàm $u(x, y)$ và $v(x, y)$ có các đạo hàm riêng tại điểm (x, y) và thỏa mãn các điều kiện (C-R)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

b) Điều kiện đủ: Nếu các hàm $u(x, y)$ và $v(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục tại điểm (x, y) và thỏa mãn điều kiện (C-R) thì hàm $f(z) = u + iv$ khả vi tại $z = x + iy$.

Lưu ý: Nếu $f(z)$ thỏa mãn điều kiện đủ của sự khả vi thì đạo hàm $f'(z)$ của nó có thể biểu diễn dưới một trong bốn dạng sau:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

Hàm đơn trị $f(z)$ khả vi tại mọi điểm của miền D được gọi là giải tích (đều, chỉnh hình) trong D . Hàm $f(z)$ giải tích tại điểm z nếu có một lân cận của z trong đó $f(z)$ giải tích.

Note: Trong một miền thì khái niệm khả vi và giải tích tương đương nhau; còn tại một điểm thì khái niệm giải tích đòi hỏi cao hơn khả vi.

Các quy tắc tính đạo hàm đối với hàm biến thực vẫn còn đúng đối với hàm biến phức.

1.6 Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

- Ý NGHĨA CỦA $|f'(z_0)|$ ($\neq 0$)

Theo định nghĩa của đạo hàm và các tính chất của modun ta có

$$|f'(z_0)| = \left| \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|W - W_0|}{|z - z_0|}$$

Vậy nếu $f'(z_0) \neq 0$ thì $|f'(z)|$ biểu thị hệ số co giãn của phép biến hình $W = f(z)$ tại điểm z_0 .

- Ý NGHĨA CỦA $\text{Arg} f'(z_0)$ với $f'(z_0) \neq 0$

$$\text{Arg} f'(z_0) = \text{Arg} \left(\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{W - W_0}{z - z_0} \right) = \lim_{z \rightarrow z_0} \text{Arg} \frac{W - W_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} [\arg(W - W_0) - \arg(z - z_0)]$$

Vậy nếu $f'(z_0) \neq 0$ thì $\arg f'(z_0)$ là góc mà ta phải quay tiếp tuyến $z_0 T$ của đường cong C để được hướng tiếp tuyến $W_0 T$ của đường cong $L = f(C)$.

1.7 QUAN HỆ GIỮA HÀM GIẢI TÍCH VÀ HÀM ĐIỀU HÒA

- Định nghĩa 1.7.1 Hàm $u(x, y)$ gọi là điều hòa trong miền D nếu nó thỏa mãn trong D phương trình Laplace: $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Dễ thấy: nếu $u(x, y)$ và $v(x, y)$ điều hòa thì hàm $s = a.u(x, y) + b.v(x, y)$ và hàm $t = u(a+x, y+b)$ với các hằng số a, b cũng là hàm điều hòa.

-Định lý 1.7.2 Nếu $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ giải tích trong miền D thì phần thực $u(x, y)$ và phần ảo $v(x,y)$ của nó là những hàm điều hòa trong miền D .

1.8 TÍCH PHÂN CỦA HÀM PHỨC

1.8.1 TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

-Định nghĩa 1.8.1 Cho một đường cong C định hướng, trơn từng khúc (có thể chia thành một số hữu hạn cung, trên mỗi cung tiếp tuyến biến thiên liên tục) và trên C cho một hàm phức $f(z)$. Tích phân đường của $f(z)$ dọc theo C được định nghĩa và ký hiệu bởi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(t_k)(z_k - z_{k-1}) = \int_C f(z)dz \quad (*)$$

Trong đó $a = z_0, z_1, \dots, z_n = b$ là những điểm kế tiếp nhau trên C , a và b là hai mút, t_k là một điểm tùy ý của C nằm trên cung $[z_{k-1}, z_k]$. Giới hạn $(*)$ thực hiện sao cho $\max I_k \rightarrow 0$ với I_k là độ dài cung $[z_{k-1}, z_k]$.

-Cách tính:

Đặt $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Nếu đường cong C trơn từng khúc và $f(z)$ liên tục từng khúc, giới nội thì ta có

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i \int_C (vdx + udy)$$

Nếu đường cong C cho dưới dạng tham số $x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$, thì ta có thể viết dưới dạng hàm phức biến thực: $z = z(t) = x(t) + iy(t); \alpha \leq t \leq \beta$. Nếu $z(\alpha) = a, z(\beta) = b$ thì

$$\int_C f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)], z'(t). dt$$

- Tính chất: Các tính chất của tích phân đường loại 2 của hàm thực vẫn đúng cho tích phân đường của hàm phức

$$1) \int_C [af(z) + bg(z)]dz = a \int_C f(z)dz + b \int_C g(z)dz$$

$$2) \int_{C_1 \cup C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz \quad C_1 \cap C_2 = \emptyset$$

$$3) \int_{AB} f(z)dz = - \int_{BA} f(z)dz$$

$$4) \left| \int_C f(z)dz \right| \leq \int_C |f(z)||dz| \leq ML$$

Với L là độ dài của C và $M = \max\{|f(z)|, z \in C\}$.

Ví dụ

1.8.2 CÁC ĐỊNH LÝ TÍCH PHÂN CAUCHY CHO MIỀN ĐƠN LIÊN

Định lý 1.8.2 Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D thì tích phân $\int_C f(z)dz$ đối với mọi đường cong C nằm trong miền này có cùng điểm đầu và điểm cuối sẽ có cùng giá trị.

Khi đó: $\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z)dz$, trong đó a và b là điểm đầu và điểm cuối của cung C .

Định lý 1.8.3 Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D và C là một đường cong kín bất kỳ nằm trong D thì: $\int_C f(z)dz = 0$.

Định lý 1.8.4 Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong miền đơn liên giới nội D và liên tục trong miền kín \bar{D} với biên C thì: $\int_C f(z)dz = 0$.

Định nghĩa 1.8.5 $F(z)$ được gọi là một nguyên hàm của $f(z)$ trong miền D nếu $F'(z) = f(z)$ trong D .

Định lý 1.8.6 Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D , z_0 và z lần lượt là điểm cố định D và điểm chạy trong D thì tích phân: $\int_{z_0}^z f(t)dt = F(z)$ như là hàm của cận trên cũng giải tích trong miền D và ta có trong D : $F'(z) = \frac{d}{dz} \int_{z_0}^z f(t)dt = f(z)$.

Định lý 1.8.7 Hai nguyên hàm của cùng một hàm số chỉ sai khác nhau một hằng số cộng.

Định lý 1.8.8 Nếu $F(z)$ là một nguyên hàm nào đó của hàm giải tích $f(z)$ trong miền đơn liên D thì với mọi z_0 và z trong D ta có: $\int_{z_0}^z f(t)dt = F(z) - F(z_0)$

Ví dụ

1.8.3 ĐỊNH LÝ TÍCH PHÂN CAUCHY CHO MIỀN ĐƠN LIÊN

Định lý 1.8.9 Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong miền giới nội D và liên tục trên miền kín \bar{D} với biên C thì $\oint_C f(z)dz = 0$, trong đó chiều đi trên biên C là chiều dương, tức là chiều luôn nhìn thấy miền D bên trái.

Ví dụ

1.8.4 CÔNG THỨC TÍCH PHÂN CAUCHY

Định lý 1.8.10 Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong miền n -liên, giới nội D và liên tục trong miền kín \bar{D} thì với mọi $z \in D$ ta có: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)dt}{t-z}$, trong đó C là biên miền D lấy theo chiều dương.

Ý nghĩa: Giá trị của hàm giải tích trong miền hoàn toàn được xác định bởi giá trị của nó trên biên, một điều mà hàm biến thực không có.

Hệ quả: Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong miền đơn liên giới nội D biên C và liên tục trong \bar{D} thì với mọi $z_0 \in D$ ta có: $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$.

Ví dụ

1.8.5 ĐẠO HÀM CẤP CAO CỦA HÀM GIẢI TÍCH

Định lý 1.8.11 Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong miền giới nội D và liên tục trong \bar{D} với biên C thì tại mọi z thuộc D hàm $f(z)$ có đạo hàm mọi cấp và: $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)dt}{(t-z)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$.

Hệ quả 1.8.12 Nếu $f(z)$ giải tích trong miền đơn liên giới nội D biên C và liên tục trong \bar{D} , $z_0 \in D$ thì ta có: $\frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) = \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$

Nhờ đó ta có thể tính một cách đơn giản một số tích phân dọc theo đường cong kín.

Ví dụ

Chú ý: Nếu $f(z)$ giải tích trong miền giới nội D biên C , liên tục và thỏa mãn $|f(z)| \leq M$ trong \bar{D} . Gọi L là độ dài của C và R là khoảng cách từ điểm z đến C thì ta có

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! ML}{2\pi R^{n+1}} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Đặc biệt, nếu D là hình tròn $|z - z_0| < R$ thì

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! M}{R^n} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Định lý 2.8.13 (Định lý Liouville) Giả sử hàm $f(z)$ giải tích và bị chặn trong toàn mặt phẳng thì nó là hằng số.

1.9 CHUỖI HÀM PHỨC

1.9.1 KHÁI NIỆM CHUNG

Chuỗi: $u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \quad (1.1)$

Trong đó các số hạng của nó là những hàm biến phức đơn trị có chung một miền xác định nào đó được gọi là *chuỗi hàm phức*.

Tại mỗi điểm cố định $z = z_0$ chuỗi (1.1) trở thành *chuỗi số phức*:

$$u_1(z_0) + u_2(z_0) + \dots + u_n(z_0) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z_0) \quad (1.2)$$

Nếu chuỗi (1.2) hội tụ thì z_0 được gọi là *điểm hội tụ* của chuỗi hàm (1.1), nếu không thì z_0 là *điểm phân kỳ*.

Tập hợp các điểm hội tụ của (1.1) gọi là *miền hội tụ* của chuỗi.

Gọi $S_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z)$ là *tổng riêng thứ n của chuỗi (1.1)*.

Trong miền hội tụ của (1.1) tồn tại: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = f(z)$.

Hàm $f(z)$ này được xác định trong miền hội tụ của chuỗi (1.1) được gọi là *tổng của chuỗi (1.1)* và được viết: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$

Khi đó, $R_n(z) = f(z) - S_n(z)$ được gọi là *phần dư thứ n của chuỗi (1.1)*.

Tại mọi z thuộc miền hội tụ của (1.1): $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = 0$.

Dấu hiệu Weierstrass: Nếu có một chuỗi số dương hội tụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Sao cho với mọi z thuộc D và mọi n ta có: $|u_n(z)| \leq a_n$, thì chuỗi (1.1) hội tụ tuyệt đối, tức chuỗi: $|u_1(z)| + |u_2(z)| + \dots + |u_n(z)| + \dots$ hội tụ, và chuỗi (1.1) hội tụ đều trong miền D .

Định lý 1.9.1 Nếu các số hạng $u_n(z)$ của chuỗi (1.1) liên tục trong miền D và chuỗi (1.1) hội tụ đều trong miền D thì tổng $f(z)$ của nó cũng liên tục trong D .

Định lý 1.9.2 Nếu các số hạng $u_n(z)$ của chuỗi (1.1) liên tục trong miền D và chuỗi (1.1) hội tụ đều trong D thì có thể lấy tích phân từng phần số hạng dọc theo bất kỳ đường cong L tron từng khúc nằm trong D , tức:

$$\int_L f(z)dz = \int_L u_1(z)dz + \int_L u_2(z)dz + \dots + \int_L u_n(z)dz + \dots$$

Định lý 1.9.3 Nếu các số hạng $u_n(z)$ của chuỗi (1.1) giải tích trong miền D và chuỗi (1.1) hội tụ đều trong D thì tổng $f(z)$ của chuỗi cũng phải giải tích trong D và ta có:

$$f^{(k)}(z) = u_1^{(k)}(z) + u_2^{(k)}(z) + \dots + u_n^{(k)}(z) + \dots$$

Hơn nữa chuỗi ở vế phải cũng hội tụ đều trong D .

1.9.2 CHUỖI LŨY THỪA

Chuỗi lũy thừa là chuỗi có dạng:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n = C_0 + C_1(z-a) + \dots + C_n(z-a)^n + \dots \quad (1.3)$$

Trong đó a và C_n là những số phức.

Nếu đặt $z = z - a$ thì chuỗi (6) có dạng chính tắc

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n Z^n = C_0 + C_1 Z + \dots + C_n Z^n + \dots \quad (1.4)$$

Định lý 1.9.4 (Định lý Abel) Nếu chuỗi lũy thừa (1.4) hội tụ tại điểm $Z_0 \neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối trong hình tròn $|Z| < |Z_0|$ và hội tụ đều trong mọi hình tròn $|Z| \leq r$ với $0 < r < |Z_0|$.

Hệ quả: Nếu chuỗi (1.4) phân kỳ tại Z_1 thì nó phân kỳ tại mọi điểm của miền $|Z| > |Z_1|$.

Hình tròn $|Z| < R$ được gọi là *hình tròn hội tụ của chuỗi* (1.4) nếu chuỗi hội tụ trong hình tròn và phân kỳ trong miền $|w| > R$. Khi đó, R được gọi là *bán kính hội tụ* của chuỗi (1.4). Tại những điểm của đường tròn $|Z| = R$ chuỗi (4) có thể hội tụ hoặc phân kỳ.

Bán kính hội tụ của chuỗi (3) cũng chính là bán kính hội tụ R của chuỗi (1.4), hình tròn hội tụ của chuỗi (1.3) là $|z - a| < R$.

Để tìm hình tròn hội tụ của chuỗi (3) ta áp dụng tiêu chuẩn Đalămbe hoặc Coossi cho chuỗi dương: $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n(z-a)^n|$ với $z \neq a$.

Nếu $C_n \neq 0$ với $n \geq N$ thì bán kính hội tụ R được tìm bởi

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad \text{hoặc} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

Trong đó ta quy ước nếu $R = 0$ thì chuỗi (3) chỉ hội tụ tại $z = a$, nếu $R = \infty$ thì chuỗi hội tụ với mọi z .

Ví dụ

1.9.3 CHUỖI TAYLOR

Định lý 1.9.5 Nếu $f(z)$ giải tích trong hình tròn $|z - a| < R$ thì với mọi z thuộc hình tròn đó ta có

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(t) dt}{(t - a)^{n+1}} (z - a)^n \quad (1.5)$$

Trong đó L là đường tròn $|z - a| = r$ với $r < R$.

Chuỗi (1.5) được gọi là chuỗi Taylor của $f(z)$ tại a . Bán kính R của hình tròn hội tụ của chuỗi có thể tính theo công thức ở trên hoặc có thể lấy bằng khoảng cách từ điểm a đến điểm gần nhất mà tại đó $f(z)$ không giải tích. Người ta cũng chứng minh được khai triển $f(z)$ thành chuỗi lũy thừa của $(z - a)$ là duy nhất, tức các hệ số của chuỗi thu được bằng mọi cách phải trùng với các hệ số của chuỗi (1.5).

Ví dụ:

$$1) e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad \forall z$$

$$2) \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots \quad \forall z$$

$$3) \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \dots \quad \forall z$$

$$4) \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots \quad \forall z$$

$$5) (1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \dots \quad \text{với } \alpha \in \mathbb{C}, |z| < 1$$

1.9.4 CHUỖI LAURENT

Định lý 1.9.6 Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn $G: (0 \leq) r < |z-a| < R (\leq \infty)$, thì với mọi z thuộc G ta có khai triển Laurent: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n$ (1.6), trong đó

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(t)dt}{(t-a)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \dots)$$

Với L là đường tròn $|z-a|=q; r < q < R$.

Chuỗi Laurent ở vế phải (1.6) được tách thành 2 phần

- Chuỗi $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$ hội tụ với $|z-a| < R$ được gọi là *phần đều*,

- Chuỗi $f_2(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n (z-a)^n = \frac{C_{-1}}{z-a} + \frac{C_{-2}}{(z-a)^2} + \dots$ hội tụ với $|z-a| > r$ được gọi là *phần chính*.

Chuỗi Taylor là trường hợp đặc biệt của chuỗi Laurent trong đó phần chính triệt tiêu. Người ta cũng chứng minh được khai triển Laurent theo $(z-a)$ của hàm giải tích $f(z)$ trong hình vành khăn tâm a cho trước là duy nhất và chuỗi Laurent hội tụ đều trong mọi tập kín nằm trong hình vành khăn đó. Tuy nhiên, trong các hình vành khăn khác nhau khai triển $f(z)$ có thể khác nhau.

Ví dụ

1.10 CÁC ĐIỂM BẤT THƯỜNG CÔ LẬP CỦA HÀM GIẢI TÍCH

Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong một lân cận nào đó của điểm $a \neq \infty$ trừ bản thân điểm a , tức giải tích trong miền $0 < |z-a| < r$, thì a được gọi là *điểm bất thường cô lập của hàm giải tích $f(z)$* . Khi đó $f(z)$ có thể khai triển Laurent trong miền $0 < |z-a| < r$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-a)^n \quad (1.7)$$

Điểm bất thường cô lập được chia thành ba loại: tùy theo tập hợp của hệ số khác 0 trong phần chính của khai triển (1.7) là trống, hữu hạn hoặc vô hạn mà ta gọi a là *điểm bất thường bỏ được, cực điểm, hoặc điểm bất thường cốt yếu của hàm $f(z)$* .

Vậy nếu $f(z)$ có điểm bất thường bỏ được tại a thì khai triển Laurent của nó trong miền $0 < |z-a| < r$ có dạng khai triển Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n = C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + \dots \quad (1.8)$$

Chuỗi (8) hội tụ với $|z-a| < r$ và tổng $s(z)$ của nó giải tích trong hình tròn đó, hơn nữa $s(z) = f(z)$ với $0 < |z-a| < r$ nên nếu ta có định nghĩa bổ sung

$$f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} s(z) = s(a) = C_0$$

thì hàm $f(z)$ được bổ sung sẽ giải tích trong hình tròn $|z-a| < r$.

Đặc biệt $|f(z)|$ bị chặn trong mọi lân cận đủ bé của điểm a .

Ví dụ

Nếu a là cực điểm của $f(z)$ thì khai triển Laurent của $f(z)$ trong miền $0 < |z-a| < r$ có dạng

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} C_n(z-a)^n = \frac{C_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{C_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{C_{-1}}{z-a} + C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + \dots \quad (1.9)$$

Trong đó $C_{-m} \neq 0$.

Khi đó ta còn nói a là *cực điểm cấp m của $f(z)$* . Nếu $m = 1$ thì ta nói a là *cực điểm đơn*.

Từ (9) dễ dàng thấy điều kiện cần để $z = a$ là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$ là

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty \text{ và } \lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m f(z) \neq 0 \quad (1.10)$$

Điều kiện (1.10) cũng là điều kiện đủ để $z = a$ là cực điểm cấp m của $f(z)$.

Ví dụ

Ta nói $z = a$ là *không điểm cấp m* của hàm giải tích $f(z)$ nếu khai triển Taylor của $f(z)$ quanh điểm a có dạng

$$f(z) = C_m(z - a)^m + C_{m+1}(z - a)^{m+1} + \dots \quad (1.11)$$

Với $C_m \neq 0$ hay $f(z) = (z - a)^m [C_m + C_{m+1}(z - a) + \dots] = (z - a)^m g(z)$ trong đó $g(z)$ là một hàm giải tích trong lân cận điểm a và $g(a) \neq 0$.

Nếu $m = 1$ thì $z = a$ là *không điểm đơn*.

Theo cách tính hệ số Taylor và do (11) ta có: $C_0 = f(a) = 0$; $C_1 = f'(a) = 0, \dots$

$$C_{m-1} = \frac{f^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} = 0, \quad C_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \neq 0$$

Vậy điều kiện cần và đủ để $z = a$ là không điểm cấp m của hàm giải tích $f(z)$ là

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0 \text{ và } f^{(m)}(a) \neq 0 \quad (1.12)$$

Định lý 1.10.1 Nếu $z = a$ là không điểm cấp m của hàm giải tích $f(z)$ thì nó là cực điểm cấp m của hàm giải tích $F(z) = 1/f(z)$.

Ví dụ

Theo định nghĩa nếu $z = a$ là điểm bất thường cốt yếu của hàm giải tích $f(z)$ thì khai triển Laurent của $f(z)$ quanh điểm a chứa vô số lũy thừa âm.

Ví dụ

Dạng điệu của hàm giải tích $f(z)$ trong lân cận của điểm bất thường cốt yếu được làm sáng tỏ bởi:

Định lý 1.10.2 (Định lý Weierstrass) Nếu hàm giải tích $f(z)$ có điểm bất thường cốt yếu tại a thì với mọi số phức A cho trước, kể cả $A = \infty$ sẽ có một dãy điểm z_k hội tụ đến a sao cho: $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = A$.

Kết luận: điều kiện cần và đủ để $z = a$ là điểm bất thường cốt yếu của hàm $f(z)$ là $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ không tồn tại hữu hạn cũng như vô hạn.

Ví dụ

1.11 ĐIỂM BẤT THƯỜNG CÔ LẬP TẠI VÔ CÙNG

Nếu có $R > 0$ sao cho $f(z)$ giải tích trong miền $|z| > R$ trừ $z = \infty$ thì điểm $z = \infty$ được gọi là điểm bất thường cô lập của hàm giải tích $f(z)$.

Đặt $z = 1/t$ thì: $f(z) = f(1/t) = F(t)$.

Hàm $f(t)$ khi đó giải tích trong miền $0 < |t| < 1/R$ nên có thể viết

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} t^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$$

Thay $t = 1/z$ và viết $F(t) = f(z)$ ta có khai triển Laurent của $f(z)$ trong miền $R < |z| < \infty$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^{-n} \quad (1.13)$$

Chuỗi đầu tiên trong (1.13) được gọi là phần chính và chuỗi thứ hai được gọi là phần đều của chuỗi Laurent của hàm $f(z)$ quanh $z = \infty$. Tùy theo tập hợp các hệ số khác không trong phần chính là trống, hữu hạn hay vô hạn mà ta gọi $z = \infty$ là điểm bất thường bỏ được, cực điểm hay điểm bất thường cốt yếu của $f(z)$. Nói cách khác, tùy theo $t = 0$ là điểm bất thường bỏ được, cực điểm (cấp m) hay điểm bất thường cốt yếu của hàm $F(t)$ mà ta gọi $z = \infty$ là điểm bất thường bỏ được, cực điểm (cấp m) hay điểm bất thường cốt yếu của hàm $f(z)$.

Ví dụ

B-LÝ THUYẾT THẶNG DƯ

1. KHÁI NIỆM THẶNG DƯ VÀ CÁCH TÍNH

1.1 ĐỊNH NGHĨA

Giả sử α là điểm bất thường cô lập của hàm giải tích $f(z)$ và L là một đường cong Jordan (đường cong liên tục không có điểm bội) kín trơn từng khúc giới hạn một miền D chứa α . Giả sử $f(z)$ giải tích trong \bar{D} trừ a . Khi đó ta ký hiệu và định nghĩa thặng dư của $f(z)$ tại a là

$$\text{Res}[f(z), a] = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz \quad (2.1)$$

Trong đó chiều đi trên L được lấy sao cho luôn nhìn thấy miền D nằm bên trái, tức ngược kim đồng hồ nếu $a \neq \infty$.

Theo định lý tích phân Cauchy cho miền đa liên, tích phân (2.1) không phụ thuộc L . Vì vậy ta thường chọn L là đường tròn $|z - a| = r$ với r khá bé.

Khai triển Laurent $f(z)$ quanh a có dạng

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - a)^n \quad (2.2)$$

ta có:

$$\oint_L (z - a)^{-n} dz = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \neq 1 \\ 2\pi i & \text{nếu } n = 1 \end{cases}$$

Áp dụng tích phân từng số hạng ta có: $\text{Res}[f(z), a] = C_{-1}$, tức thặng dư của $f(z)$ tại a bằng hệ số của $(z - a)^{-1}$ trong khai triển của $f(z)$ quanh a .

Nếu a là cực điểm cấp m của $f(z)$ thì

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{C_{-1}}{z-a} + C_0 + C_1(z-a) + \dots \text{ với } C_{-m} \neq 0$$

Từ đó dễ dàng chứng minh

$$C_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)] \quad (2.3)$$

Nếu $m = 1$ thì công thức (5.5) có dạng

$$C_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)f(z)] \quad (2.4)$$

Hơn nữa, nếu a là cực điểm đơn của $f(z) = h(z)/g(z)$, tức $h(a) \neq 0$, $g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$, thì ta có

$$C_{-1} = \frac{h(a)}{g'(a)}$$

Ví dụ

Chú ý: Nếu $a \neq \infty$ là điểm bất thường bỏ được của $f(z)$ thì rõ ràng $\text{Res}[f(z), a] = 0$. Nhưng nếu $a = \infty$ là điểm bất thường bỏ được của $f(z)$ thì có thể $\text{Res}[f(z), \infty] \neq 0$.

1.2 CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN VỀ THẶNG DƯ

Định lý 1.2.1 Nếu $f(z)$ giải tích trong miền kín \bar{D} , giới hạn bởi đường cong kín C , trừ một số điểm bất thường cô lập a_1, a_2, \dots, a_n nằm trong D thì

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), a_k] \quad (2.5)$$

Định lý 1.2.2 Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong toàn mặt phẳng, trừ một số hữu hạn điểm bất thường a_1, a_2, \dots, a_n . Khi đó

$$\sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), a_k] + \text{Res}[f(z), \infty] = 0$$

2. ỨNG DỤNG CỦA THẶNG DƯ

2.1 Tính tích phân dọc theo đường cong kín

Ví dụ 1. Tính $I = \oint_C \frac{e^z dz}{z^2 + 1}$ với $C: |z| = 3$.

Hàm $f(z)$ dưới dấu tích phân có hai điểm bất thường i và $-i$ nằm trong hình tròn biên C .

Ta có: $\text{Res}[f(z), i] = \frac{e^i}{2i}$ và $\text{Res}[f(z), -i] = \frac{-e^{-i}}{2i}$.

Vậy: $I = 2\pi i \cdot \frac{e^i - e^{-i}}{2i} = i2\pi \sin 1$.

Ví dụ 2. Tính $I = \oint_C \frac{z+3}{(z-1)(z+1)^2} dz$ với $C: |z - 1/2| = 1$.

Trong miền giới hạn bởi C hàm $f(z)$ dưới dấu tích phân chỉ có một điểm bất thường $z = 1$, cực điểm đơn.

Do đó, $I = 2\pi i \text{Res}[f(z), 1] = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)f(z) = 2\pi i$.

2.2 Tính tích phân xác định có dạng $\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt$

Trong đó hàm dưới dấu tích phân là một hàm hữu tỉ của $\sin t$ và $\cos t$.

Đặt $z = e^{it}$ thì $\ln z = it$; $dt = dz/iz$

Và theo định nghĩa các hàm lượng giác ta có: $\cos t = \frac{z+1/z}{2}$, $\sin t = \frac{z-1/z}{2i}$.

Khi t chạy từ 0 đến 2π , điểm z vẽ một lần đường tròn $C: |z| = 1$.

Vậy sau khi thay biến t bởi z và áp dụng thặng dư ta có:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt = \oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), a_k]$$

Trong đó: $f(z) = \frac{R[\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}, \frac{z+1/z}{2}]}{iz}$; a_k là các điểm bất thường của $f(z)$ thỏa mãn $|a_k| < 1$ nếu hàm $f(z)$ không có điểm bất thường nằm trên đường tròn $|z| = 1$.

Ví dụ 3. Tính $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t}$.

Đặt $z = e^{it}$ ta có

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{2 + \cos t} = \frac{1}{2i} \oint_C \frac{dz}{[2 + (z + 1/z)/2]z} \\ &= \frac{1}{i} \oint_C \frac{dt}{z^2 + 4z + 1} = \frac{1}{i} \oint_C \frac{dz}{(z - a)(z - b)} \end{aligned}$$

Trong đó C là đường tròn $|z| = 1$, $a = -2 + \sqrt{3}$, $b = -2 - \sqrt{3}$ là các nghiệm của phương trình $z^2 + 4z + 1 = 0$.

Vì $|a| < 1$, $|b| > 1$ nên ta có:

$$I = 2\pi \text{Res} \left[\frac{1}{(z-a)(z-b)}, a \right] = \frac{2\pi}{a-b} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

KẾT LUẬN

- 1) Báo cáo học thuật đã giới thiệu các khái niệm cơ bản về hàm một biến phức.
- 2) Báo cáo học thuật cũng đã giới thiệu được khái niệm về thặng dư và ứng dụng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Đào Bá Dương, *Giáo trình cơ sở hàm số biến phức và ứng dụng*, Học viện Kỹ thuật Quân Sự (2000) .
- [2] Nguyễn Thủy Thanh, *Cơ sở lý thuyết hàm biến phức*, 565 trang, NXB Đại học quốc gia Hà Nội, Việt Nam (2006).
- [3] Joel. L. Schiff, *The Laplace Transform: Theory and Applications*, Springer, (1999)
- [4] Marcel B. Finan, *Laplace Transforms: Theory, Problems, and Solutions*, Arkansas Tech University.